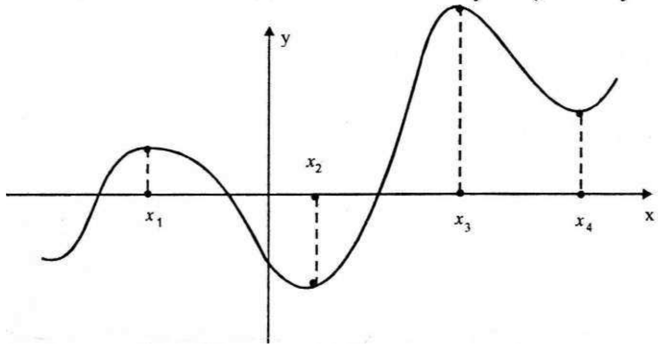
Тема: Критические точки функции. Максимумы и минимумы.

Экстремум функции

Исследование функции на экстремум – одно из важнейших приложений производных. Рассмотрим определение минимумов и максимумов, и способы их отыскания.

Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на некотором множестве и точка x_0 – точка внутри него.

Определение. Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет ***максимум*** (***минимум***), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точка x_0 называется тогда точкой ***максимума*** (***минимума***).



Показан график функции, которая имеет две точки максимума (x_1 и x_3) и две точки минимума (x_2 и x_4), причем максимальное значение может оказаться меньше минимального ($f(x_1) < f(x_4)$). Это подчеркивает тот факт, что мы характеризуем особенность функции только вблизи некоторой точки.

Значения функции в точках максимума и минимума называют экстремальными значениями или ***экстремумами***. На приведенном графике видно, что точки экстремума (x_1, x_2, x_3, x_4) определяют интервалы монотонности функции, в каждом из которых производная сохраняет определенный знак. В точках экстремума, понятно, производная обращается в нуль. Сформулируем теорему о ***необходимом условии*** существования экстремума.

Теорема. Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$.

Заметим сразу, что условие это не является достаточным, т. е. обратное утверждение не всегда верно. Из равенства $f'(x_0)=0$ не обязательно следует, что в точке x_0 существует экстремум.

Подтверждением тому пример с функцией $f(x)=x^3$.

Найдем $f'(x)=3x^2$. В точке $x=0$ $f'(0)=0$. Но как угодно близко к точке $x=0$ найдем $x>0$, где $f(x)=x^3 > 0$, найдем $x<0$, где $f(x)=x^3<0$. Т. е. не существует какая-либо малая окрестность точки $x=0$, где для всех x значение функции в точке $x=0$ будет самым большим или самым малым. Поэтому точка $x=0$ не является точкой экстремума.

Можно рассуждать иначе. Так как производная $f'(x)=3x^2$, то функция $f(x)=x^3$ возрастает при любых действительных x и экстремумов не имеет.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума $(f'(x)=0)$ называются ***критическими***.

Очевидно, что касательная к графику функции в точках, где $f'(x)=0$, параллельна оси абсцисс Ox.

Достаточное условие экстремума дается в следующих теоремах.

Теорема 1. Если x_0 – критическая точка функции и при переходе через нее производная меняет знак, то x_0 – точка экстремума, а именно, если производная меняет знак с плюса на минус – точка максимума, если – с минуса на плюс – точка минимума.

Заметим, что экстремума в точке нет, если производная не меняет знака. Правило исследования на экстремум с помощью первой производной известно из школьного курса. Достаточное условие экстремума иногда удобнее формулировать с помощью второй производной.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой области (т. е. $f(x)$ имеет $f'(x)$ и $f''(x)$).

Теорема 2. Если x_0 – критическая точка функции $f(x)$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

С помощью второй производной определяется выпуклость или вогнутость графика функции.

Выпуклость, вогнутость. Точка перегиба.

Кривая $y=f(x)$ называется ***выпуклой*** на интервале, если все точки кривой лежат ***ниже*** любой ее ***касательной*** на этом интервале. Тогда на этом интервале $f''(x) < 0$.

Кривая $y=f(x)$ называется ***вогнутой*** на интервале, если все точки кривой лежат ***выше*** любой ее ***касательной*** на этом интервале. Тогда на этом интервале $f''(x) > 0$

Определение. ***Точкой перегиба*** кривой называется точка, по одну сторону от которой кривая выпукла, по другую вогнута.

В точке перегиба $f''(x)=0$.

Итак, знак второй производной (как и знак самой функции и ее первой производной) свидетельствует об особенностях графика функции

Пример 1.

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1.$$

Решение. 1^0. Находим производную $y'=x^2-4x+3$.

2^0. Приравниваем ее нулю и решаем уравнение $x^2-4x+3=0$. Его корни $x_1=1$, $x_2=3$ — критические точки.

3^0. Производную можно представить в виде произведения множителей: $y'=(x-1)(x-3)$. Исследуем критическую точку $x_1=1$, определяя знак y' вблизи этой точки слева и справа от нее. Так как $y'_{x<1}>0$, $y'_{x>1}<0$, то при $x_1=1$ функция имеет максимум. Аналогично, для точки $x_2=3$ получим $y'_{x<3}<0$, $y'_{x>3}>0$. Следовательно, при $x_2=3$ функция достигает минимума.

Пример 2.

Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, т. е. $x \in (-\infty, +\infty)$.

Найдем вторую производную.

$y'=1+72x-6x^2-4x^3$.

$y''=72-12x-12x^2=-12(x^2+x-6)$.

Из уравнения $y''=0$ получим абсциссу точки перегиба:

$-12(x^2+x-6)=0$ $\quad x_1=-3;$ $\quad x_2=2$.

Определим знак y'' на интервалах

$(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$, $(2, +\infty)$.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y''	–	0	+	0	–
форма кривой	выпукла	перегиб	вогнута	перегиб	выпукла

Найдем ординаты точек перегиба:

$y(-3)=726;$ $\quad M_1(-3; 726)$ – точка перегиба

$y(2)=114;$ $\quad M_2(2; 114)$ – точка перегиба.

На интервале $(-3; 2)$ кривая вогнута. На интервалах $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$ – выпукла.

Домашнее задание.

§ 23

№ 292 (а,б), 293 (а,б)